Олимпиадные задачи и жизнь

Проект 9-го класса учеников ОАНО “Лидеры”

Руководитель: Сидоренко Л.Н.

Оглавление

Вступление

Еще в начальных классах ученики постоянно говорят, что в математике нет никакой практической пользы, и она не понадобится им в жизни. Многие считают, что она слишком трудная для них. На примере олимпиадных задач по математике с 5-го по 9-ые классы, мы решили показать, что все не так сложно, как кажется большинству учеников. К каждому типу задач мы подобрали максимально простое решение и составили жизненное пояснение.

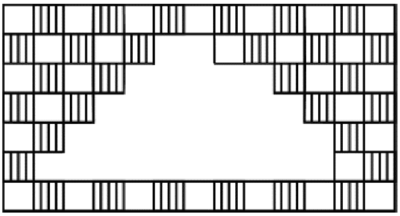
5-6 классы

1. На сколько недель может накладываться год? Считаем, что год накладывается на неделю, если хотя бы один день этой недели приходится на данный год. (Олимпиада «Ломоносов»)

Решение. Так как в году 365 дней или 366, а в неделе 7 дней, то мы можем узнать сколько недель в году. 365 : 7 = 52 (ост. 1) - в году 52 целых недели и остаётся 1 день => что если хотя бы 1 день считается за неделю, то в итоге на год приходится 53 недели, а если год високосный, то 54, так как эти 2 дня могут приходиться на разные недели (воскресенье первой недели и понедельник последней)

Ответ. 53 или 54 недели.

2. Плитки двух видов были выложены на стене в шахматном порядке. Несколько плиток упали со стены. Оставшиеся плитки изображены на рисунке. Сколько полосатых плиток упало? Обязательно объясните свой ответ. (Олимпиада «Всеросс»)

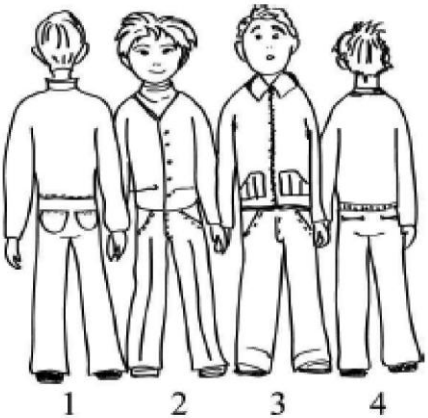


Решение. На рисунке продолжим вертикальные и горизонтальные линии и получим квадратики, закрашиваем их (рядом с белой рисуем закрашенную, а рядом с закрашенным белую). Затем сосчитаем сколько нарисовано закрашенных плиток, у нас получится 15.

Ответ: 15.

Жизненная ситуация: Можно представить эту задачу, как ситуацию из жизни. Вы делаете дома ремонт, но тут пришёл маленький сын или брат и случайно разбил несколько плиток. Вам нужно подсчитать, сколько он привёл в негодность плиток определённого цвета. Так как они были в шахматном порядке (после каждой закрашенной белая, после каждой белой закрашенная), то будет легко посчитать, сколько плиток упало.

3. На картинке мы видим четырёх детей: Колю, Васю, Сеню и Яна. Известно, что мы видим Сеню правее Коли, а Коля дал Васе левую руку. Найдите, как кого зовут, и объясните, почему Вы так считаете. (Олимпиада «Всеросс»)



Решение. Коля не может быть четвёртым, потому что справа никого нет, а должен быть Сеня. Если Коля третий, то тогда четвёртый это Вася, но правее больше никого нет, значит третий не Коля. Он не может быть первым, потому что левую руку первый никому не даёт. Следовательно, Коля второй, тогда третий - это Вася, четвёртый - это Сеня, а первый - это Ян.

Ответ: Коля второй, тогда третий - это Вася, четвёртый - это Сеня, а первый - это Ян.

4. По дороге едут велосипедисты: на запад — Вася и Петя с равными между собой скоростями, а на восток — Коля и Миша с равными между собой скоростями. Вася встретился с Мишей в 12:00, Петя с Мишей — в 14:00, Вася с Колей в 15:00. Когда встретились Петя с Колей? (Олимпиада «Физтех»)

Решение. Мишу и Коля имеют равные скорости, и если Миша и Вася встретились в 12, а Коля с Васей в 15, то Коля выехал на 3 часа позже Миши. И так как Петя и Вася едут с одинаковой скоростью, и Петя с Мишей встретился в 14, то с Колей он встретился в (14+3=)17.

Ответ: 17

Жизненная ситуация: Можно представить, что вы собрались в поход и договорились со всеми встретиться в определенное время. Если мы знаем разницу между временем, с которой товарищи встретились друг с другом, мы можем подсчитать, через сколько кто-либо встретились с определённым товарищем.

5. Том Сойер красит расположенный вдоль дороги забор, состоящий из 68 досок. Каждую доску он красит либо в красный, либо в зелёный цвет. При этом Том хочет, чтобы рядом с каждой красной доской была зелёная. Какое наибольшее количество досок Том может покрасить в красный цвет?

Решение. Рассмотрим несколько возможных вариантов:

1) Если после каждой красной доски идёт зелёная, то красных досок столько же, сколько и зелёных. Значит красных досок будет 68:2=34

2) Если после одной зелёной доски идут две красные (см. рис.), то отношение зелёных и красных досок 1:2, то 68:3=22(ост.2) => 22 зелёные. В остатке осталось 2, так как у нас идут доски в порядке ЗКК, то в остатке одна будет зелёная, а другая красная. Значит зелёных досок 23, а красных (68-23=) 45.

3) Если после трёх красных идёт одна зелёная, то условие не выполняется

Ответ: 45

Жизненная ситуация: Вы красите забор и вам нужно рассчитать требуемое количество краски.

7 класс

1. Аня и Коля собирали яблоки. Оказалось, что Аня собрала столько же яблок, сколько Коля собрал процентов от общего числа собранных ими яблок наоборот, Коля собрал столько же яблок сколько Аня собрала процентов от общего числа собранных ими яблок. Сколько яблок собрала Аня и сколько Коля? (Открытая олимпиада школьников по математике 2015)

Решение: Если сложить два имеющихся условия, то суммарное количество яблок равно общему количеству процентов. Значит, всего Аня и Коля собрали ровно 100 яблок. Если бы кто-то из них собрал больше яблок, то и собрал бы и больше процентов. С другой стороны, из условия следует, что больше процентов собрал бы другой. Значит, оба собрали по 50 яблок.

Ответ: по 50 яблок.

Жизненная ситуация: Мы разделили работу среди друг друга на части, и нужно понять, кто сколько выполнил от общего объема, и каждый ли выполнил свою часть работы.

2. Петя и Вася играли в игру. Всего в игре три хода. Первым ходом Петя ломает палочку длиной 10 см на две части. Затем Вася ломает одну из получившихся палочек на две части. Последним ходом Петя ломает одну из трёх имеющихся палочек на две части. Вася выигрывает, если из каких-нибудь трёх получившихся частей можно составить треугольник, Петя – в противном случае. Кто выиграет при правильной игре? (Открытая олимпиада школьников по математике 2015)

Решение: первым ходом Петя ломает исходную палочку на две палочки по 5 сантиметров. Вася ломает одну из этих палочек на две части, имеющие длинны a и b. Допустим $a \geq b$. Тогда Петя ломает палочку палочку длины b на две произвольные части c и d. Отрезок 5 см равен сумме трёх оставшихся, поэтому не может входить в треугольник ни с какой парой остальных. Отрезок a не меньше суммы $c+d$, значит, из a, c и d треугольник также составить нельзя.

Ответ: Петя.
Жизненная ситуация: Мы играем в настольную игру и продумываем различные комбинации и ходы с помощью аналогичных математических операций.

3. В турнире по волейболу участвуют 30 команд. Каждое утро организатор составляет расписание матчей на сегодня. Согласно этому расписанию, команды разбиваются на пары и играют по одному матчу. Каждый матч заканчивается победой одной из команд, ничьих не бывает. Докажите, что как бы организатор ни составлял расписание, команды будут играть между собой так, что никогда не появится команда, проигравшая пять матчей подряд. (Открытая олимпиада школьников по математике 2015)
Решение. Чтобы гарантированно получить команду, проигравшую пять матчей подряд, надо свести в пару две команды, каждая из которых на данный момент имеет проигрышную серию не менее, чем из четырех матчей подряд (то есть ровно четыре). Чтобы за день до этого образовались две такие команды, необходимо было свести в две пары четыре команды каждая из которых имеет текущую проигрышную серию не менее, чем из трёх матчей. И т.д., за четыре дня до этого должно было быть хотя бы 16 команд, имеющие текущую проигрышную статистику не менее одного матча, т.е. проигравшие свои последние матчи. Но каждый день у нас образуется ровно 15 команд победителей и 15 побежденных. Значит, получить 16 команд, побежденных невозможно.
Жизненная ситуация: При составлении расписания спортивных матчей, можно воспользоваться аналогичными рассуждениями.

4. **У Чебурашки и Крокодила Гены было по несколько конфет. Гена сказал Чебурашке: «Дай мне три конфеты, и у меня будет столько же конфет, сколько у тебя». Чебурашка ответил: «Лучше ты дай мне четыре конфеты, и у меня будет в два раза больше конфет, чем у тебя». Сколько всего конфет было у Гены и Чебурашки?** (Открытая олимпиада школьников по математике 2011)

Решение: Пусть у Гены и Чебурашки вместе было 2х конфет. Тогда из первого условия мы получим, что у Гены было х – 3 конфет, а у Чебурашки х + 3 конфет. Из второго условия составим уравнение (х – 3 – 4)· 2 = х + 3 + 4, то есть х = 21, а 2х = 42.
Ответ: 42
Жизненная ситуация: Вы коллекционируете с другом марки и нужно понять, у кого больше марок, а у кого - меньше.

5. Пароход идёт от пункта А до пункта В по течению реки 5 суток, а против течения 10 суток. Сколько суток плывёт плот от пункта А до пункта В? (Открытая олимпиада школьников по математике 2012)
Решение. Пусть х, у- скорости парохода (в стоячей воде) и течения реки в км/сут. соответственно, S(км)- расстояние между пунктами. Составим систему уравнений. $\begin{cases} \frac{S}{5} = x + y \\ \frac{S}{10} = x - y \end{cases} \Rightarrow 2y = \frac{S}{10} \Leftrightarrow y = \frac{S}{20}.$
А т.к. у плота нет собственной скорости, то его скорость равна течению реки. Поэтому плот по течению реки из пункта А в пункт В плывёт 20 суток.
Ответ: 20 суток.
Жизненная ситуация: Вы отправляетесь в путешествие и нужно грамотно рассчитать время поездки.

6. На столе лежат конфеты трёх видов: ириски, карамельки и леденцы. Известно, что ирисок на 8 меньше, чем всех остальных конфет, а карамелек - на 14 меньше, чем всех остальных конфет. Сколько леденцов лежит на столе? Объясните свой ответ. (Открытая олимпиада школьников по математике 2011)
Решение: Пусть И – ириски, К – карамельки, Л – леденцы. Тогда И=К+Л-8, К=Л+И-14 или К=Л+(К+Л-8)-14, отсюда решаем 22=2Л=>Л=11.
Ответ: 11.
Жизненная ситуация: Вас обвиняют, что вы съели пирожное, которое лежало на столе, но вы его не ели, и вам нужно доказать, что это сделали не вы, а брат.

7. Два брата ели конфеты из коробки. Один брат съел половину всех конфет и ещё одну. Которой брат- половину оставшихся и ещё три конфеты. После этого в коробке осталось четыре конфеты. Сколько конфет было в коробке первоначально? (Открытая олимпиада школьников по математике 2011)

Решение: пусть x-количество конфет в коробке. Первый брат съел 0.5x+1 конфет, второй 0.5(x-(0.5x+1)+3 конфет. Получаем уравнение 0.5x+1+0.5(x-(0.5x+1))+3+4=x. Откуда 0.25x=7.5 => x=30.

Ответ: 3.

Жизненная ситуация: Вам нужно понять, сколько кто потратил денег от общей суммы (или съел что-то), и вы применяете подобные вычисления, чтобы это понять.

8. Алексей заплатил 41 рубль за пять авторучек, четыре тетради и две резинки. Богдан заплатил 42 рубля за семь авторучек, три тетради и резинку. Сколько рублей заплатил Владимир за авторучку, шесть тетради и четыре резинки? (Открытая олимпиада школьников по математике 2014)

Решение: Пусть x, y, z- стоимость авторучки, тетради, резинки в рублях. Получаем два уравнения.

$$\begin{cases} 5x+4y+2z=41 \\ 7x+3y+z=42 \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 3, а второе на 2 и вычтем из первого уравнения второе. Получим x + 6y + 4z = 39.

Ответ: 39.

Жизненная ситуация: Вам нужно понять, сколько кто потратил денег от общей суммы (или съел что-то), и вы применяете такие вычисления, чтобы это понять.

9. Среди 67 учащихся курсов иностранных языков 47 человек изучают английский, 35 – немецкий, а 23 – оба языка. Сколько человек не изучают ни немецкий, ни английский языки? (Открытая олимпиада школьников по математике 2011)

Решение. Из условия можно найти сколько человек изучают иностранные языки 47 + 35 – 23 = 59. Тогда отнимаем от общего

количества детей количество детей, изучающих иностранные языки 67-59=8. Следовательно 8 человек не изучают никакой из данных языков.
Ответ: 8.
Жизненная ситуация: Вас обманули в магазине на деньги, и вы пытаетесь доказать, что правы вы.

10. Четыре мальчика собирали яблоки, каждый собрал хотя бы одно. Коля собрал треть всех собранных яблок, а Вася собрал в два раза больше, чем Миша, и на 12 яблок больше, чем Петя. Какое наименьшее количество яблок мог собрать Вася? (Открытая олимпиада школьников по математике 2014)
*Решение. Пусть Миша собрал x яблок, тогда Вася собрал 2*x яблок, а Петя (2x-12). Если сложить эти данные, то мы получим x+2x+(2x-12)=5x-12 или две трети всех собранных яблок. Отсюда следует, что всего яблок 3*(5x-12)/2. Количество яблок должно быть натуральным числом и делится на 2, поэтому подбором находим наименьшее подходящее число – Восемь, а значит Вася – шестнадцать.*
Ответ: 16.
Жизненная ситуация: Вы коллекционируете с другом марки и нужно понять, у кого больше марок, а у кого - меньше.

11. В комнате собрались двенадцать человек, каждый из которых либо рыцарь, всегда говорящий правду, либо лжец, который всегда лжёт. Их пронумеровали числами от одного до двенадцати. Первый сказал: “Все люди в этой комнате с номерами, делящимися на 2, Лжецы”. Второй сказал: “Все Люди в этой комнате с номерами, делящимися на 3, лжецы” и т.д. Одиннадцатый сказал: “Все люди в этой комнате с номерами, делящимися на 12 лжецы”. 12 человек, в отличии от всех предыдущих промолчал. Сколько лжецов находится в комнате? (Открытая олимпиада школьников по математике 2014)
Решение. Заметим, что любой человек с номером 6 и более обвиняет во лжи только следующего по номеру человека. Значит, люди с номерами 7,9,11 принадлежат к одному типу (назовём его

первым), а люди с номерами 6,8,10,12 - к другому (назовём его вторым). Тогда человек с номером 5 также принадлежит к первому типу, так как обвиняет во лжи 6 и 12. Человек с номером 4 утверждает, что 5 и 10 лжецы. Это утверждение не может быть верным, значит он гарантированный лжец. Человек с номером 3 обвиняет во лжи 4,8,12 человека, значит он человек первого типа. Аналогично человек номер 2 лжец, а человек номер 1 первого типа. Таким образом, мы получили двух гарантированных лжецов, шестерых человек первого типа и четверых - второго. Если первый тип - лжецы, в второй - рыцари, мы получим 8 лжецов и 4 рыцаря, если же наоборот, то и рыцарей, и лжецов по 6 человек.

Ответ: 6 или 8.

Жизненная ситуация: заметив определенную закономерность в поведении людей, вы можете понять, когда вам врут.

8 класс

1. Робинзон Крузо каждый второй день пополняет запасы питьевой воды из источника, каждый третий день собирает фрукты и каждый пятый день ходит на охоту. Сегодня, 13 сентября, у Робинзона тяжёлый день: он должен делать все эти три дела. Когда у Робинзона будет следующий тяжёлый день?

Решение. Следующий тяжёлый день должен быть через такое количество дней, которое кратно двум, трём и пяти. Наименьшее число, которое удовлетворяет данному требованию 30. Следовательно через 30 дней или 13 октября будет следующий тяжёлый день.

Ответ: 13 октября

Жизненная ситуация: Составлять расписание тренировок. Таким образом, мы сможем грамотно расставить разгрузочные дни.

2. Самолёт вылетел из Перми 28 сентября в полдень и прибыл в Киров в 11 часов утра (везде в задаче время отправления и прибытия указывается местное). В 19 часов того же дня самолёт вылетел из Кирова в Якутск и прибыл туда в 7 часов утра. Через три часа он вылетел из Якутска в Пермь и вернулся туда в 11 часов утра 29 сентября. Сколько времени самолёт находился в воздухе?

Решение. Самолет вылетел из Перми (в 12-00) и вернулся на следующий день (в 11-00) в Пермь, в тот же часовой пояс. Разница времени в разных часовых поясах роли не играет. А время стоянки определяется разницей времени прилета и вылета по местному времени.

24+11-12=23 (час) - самолет отсутствовал в Перми;

19-11=8 (час) - находился на аэродроме Кирова (не в воздухе);

8+3=11 (час) - общее время стоянки (находился на аэродромах Кирова и Якутска);

23-11=12 (час) --- время нахождения самолета в воздухе.

Ответ : 12 час самолет находился в воздухе.

Жизненная ситуация: Рассчитывать, сколько нужно времени и топлива на дорогу на машине, самолете, поезде.

3. На поляне собрались 25 гномов. Известно, что 1) каждый гном, который надел колпак, надели обувь; 2) без колпака пришли 12 гномов; 3) босиком пришло 5 гномов. Каких гномов и на сколько больше: тех, кто пришёл в обуви, но без колпака, или тех, кто надел колпак?

Решение. 25-12=13 (гномов) – с колпаком и в обуви
25-5=20 (гномов) – в обуви
20-13=7 (гномов) – в обуви без колпаков
13-7=6 (гномов) – разница
Ответ: Гномов с колпаком и в обуви на 6 больше, чем в обуви без колпаков.

Жизненная ситуация: Данная задача поможет вам проанализировать то, что надели ваши дети.

4. Фирма изготавливает лимонный напиток, разбавляя лимонный сок водой. Сначала фирма производила напиток, содержащий 15% лимонного сока. Через некоторое время генеральный директор отдал указание снизить содержание лимонного сока до 10%. На сколько процентов увеличится количество производимого лимонного напитка при тех же объёмах поставок лимонов?

Решение. Из x литров сока получается x:0,15 литров напитка, в котором 15% сока и x:0,1 литров напитка, в котором 10% сока.
(x:0,1)/(x:0,15)=(x:0,1)(0,15:x)=0,15/0,1=1,5
увеличение в 1,5 раза это увеличение на 50%.
Ответ: производство увеличится на 50%

Жизненная ситуация: Рассчитывать собственные заработки, контролировать бюджет. Вам повысили заработную плату, и вы решили увеличить расходы на еду и одежду, но вам надо выплачивать кредит. И вы рассчитываете, на сколько можно увеличить расходы.

5. Двенадцать стульев стоят в ряд. Иногда на один из свободных стульев садится человек. При этом ровно один из его соседей

(если они были) встает и уходит. Какое наибольшее количество человек могут одновременно оказаться сидящими, если вначале все стулья были пустыми?

Решение. Сначала первый человек садиться на 1 стул, второй садиться на 3, третий садится на 2 стул и человек с 3 стула встаёт и уходит, четвёртый садиться на 5, следующий садится на 4, и человек с 5 уходит, таким образом заполняем стулья. В итоге получится 11 стульев, на которых кто-то сидит.

Ответ: 11 стульев.

Жизненная ситуация: Вы устраиваете мероприятие. Вам нужно рассадить зрителей так, чтобы всем было видно.

6. За круглым столом сидят 10 человек, каждый из которых либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Двое из них заявили: «Оба моих соседа — лжецы», а остальные восемь заявили: «Оба моих соседа — рыцари». Сколько рыцарей могло быть среди этих 10 человек?

Решение. Пронумеруем всех сидячих за столом от 1 до 10, если номер 1 рыцарь и если он сказал, что рядом с ним два рыцаря, то рядом с ним номер 10 и 2 Тоже рыцари, а значит все остальные тоже рыцари => это решение не верно, значит если лжец сказал, что рядом с ним два рыцаря- 10 и 2, они говорят, что с ними рядом 2 лжеца, значит 9 и 3 лжецы => все остальные лжецы, кроме 10 и 2, значит рыцарей всего 2. Так же, если 1 рыцарь скажет "все мои соседи лжецы", а 2 и 10, что их соседи рыцари, то условие будет выполняться. Следовательно, все остальные будут лжецами.

Ответ: всего 2 рыцаря, все остальные лжецы.

Жизненная ситуация: Вы знаете несколько факторов о химической реакции. Дан неизвестный вам элемент и несколько других. Ваша задача - определить этот элемент.

7. Чётное число орехов разложено на три кучки. За одну операцию можно переложить половину орехов из кучки с чётным числом орехов в любую другую кучку. Докажите, что, как бы орехи ни были разложены изначально, такими операциями можно в какой-нибудь кучке собрать ровно

половину всех орехов.

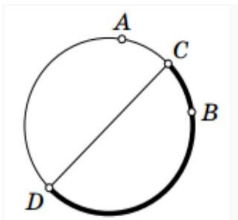
Решение. Заметим, что если мы добьёмся размеров кучек x, 2x и y, то мы сможем получить кучки размеров x, x и x + y, где x + y чётно, а далее – размеров x, ½ (3x + y) и ½ (x + y), где в средней кучке ровно половина орехов.

Опишем алгоритм, по которому можно получить нужные размеры кучек. Выберем пару кучек так, чтобы хотя бы одна была чётной: (2m, n). Если m = n, то мы у цели. Пусть m ≠ n. Будем преобразовывать пару так, чтобы всегда оставалась чётная кучка, а общее число орехов в паре либо уменьшалось, либо сохранялось, но при сохранении уменьшался модуль разности |m – n|. А именно, если m или n чётно, то переложим m орехов в третью кучку, при этом общее число орехов в паре уменьшится. Если m и n нечётны и не равны, то переложим m орехов из одной кучки в другую, получив пару (m, m + n). При этом m+ n чётно, и |½ (m + n) – m| = ½ |n – m|<|m – n|. Поскольку уменьшать и общее число орехов, и разность |m – n| можно лишь конечное число раз, рано или поздно m и n станут равны.

Ответ: рано или поздно m и n станут равны.

Жизненная ситуация: Вы владелец крупной фирмы по переработке древесины, вам из 3 складов нужно перевести все ваши брёвна в 2 других. Но ваши рабочие не справляются, они могут определить только половину всех брёвен.

8. Володя бежит по круговой дистанции с постоянной скоростью. В двух точках дистанции стоит по фотографу. После старта Володя 2 минуты был ближе к первому фотографу, затем 3 минуты — ближе ко второму фотографу, а потом снова ближе к первому. За какое время Володя пробежал весь круг? (ОММО 2015)



Решение. Отметим первого и второго фотографа на круге с помощью точек A и B соответственно, точками C и D обозначим середины дуг, соединяющих A и B. Тогда на полуокружности CAD Володя ближе к первому фотографу, а на полуокружности CBD

(обозначенной жирным на рисунке) – ближе ко второму. По условию ближе ко второму фотографу он был в течение 3 минут. Следовательно, весь круг он пробегает за 6 минут.
Ответ: за 6 минут.
Жизненная ситуация: Вы хотите прийти в забеге первым. Для этого вы рассчитываете за сколько вы пробегаете круг, и где вам нужно ускорится, а где замедлиться.

9 класс

1. Дима должен был попасть на станцию в 18:00. К этому времени за ним должен был приехать отец на автомобиле. Однако Дима успел на более раннюю электричку и оказался на станции в 17:05. Он не стал дожидаться отца и пошёл ему навстречу. По дороге они встретились, Дима сел в автомобиль, и они приехали домой на 10 минут раньше рассчитанного времени. С какой скоростью шёл Дима до встречи с отцом, если скорость автомобиля была 60 км/ч?

Решение. Пусть AB - расстояние от станции до дома, точка C - место встречи сына с отцом;
Отец сэкономил 10 мин, не ездя от C до A и обратно ,т е
*(2*AC)/60 км/ч= 1/6 часа*
AC= 5 км
AC / 60 = 5/60 =1/12 часа папе надо было ещё ехать до A и прибыть туда в 18-00
18 - 1/12 = 17 и 11/12 часа - время встречи
t = 17 и11/12- 17и5/60 = 50/60 =5/6 часа шел сын
AC/(5/6)= 5 /(5/6)= 6 км/ч -скорость сына.
Ответ: 6 км/ч.
Жизненная ситуация: Вы рассчитываете, как потратить меньше времени на дорогу домой.

2. Есть три сосуда объёмом 3 л, 4 л и 5 л без делений, кран с водой, раковина и 3 л сиропа в самом маленьком сосуде. Можно ли с помощью переливаний получить 6 л смеси воды с сиропом так, чтобы в каждом сосуде количество воды было равно количеству сиропа?

Решение. (1 действие) Из 3 в 4 переливаем сироп. 3 - пусто, 4-3 л. сиропа, 5-пусто.
(2 действие). 5 набираем водой, переливаем в 3, из 3 воду сливаем в раковину. 3 - пусто, 4-3 л. сиропа, 5-2 л. воды.
(3 действие). Переливаем сироп обратно в 3. В 4 наливаем 2 литра

воды из 5, и доливаем 4 сиропом из 3 до полного. 3 - 1 л. сиропа, 4 - 4 литра смеси 50/50, 5 - пусто.
(4 действие). Переливаем из 3 сироп в 5. Переливаем из 4 смесь в 3. 3 - 3 литра смеси 50/50, 4 - 1 литр смеси 50/50, 5 - 1 литр сиропа.
(5 действие). Берем в 5 (где 1 литр сиропа) выливаем смесь из 3. Если рассмотреть отдельно, то там 4 литра жидкости. Из которых 3 литра - смесь 50/50, 1 литр сиропа, 1 литр свободного места. Доливаем в свободное место 1 литр воды из крана. Получаем 5 литров смеси 50/50.
3 - пусто. 4 - 1 литр смеси 50/50, 5 - 5 литров смеси 50/50. Итого 6 литров смеси 50/50.
Ответ: 6 литров смеси 50/50.

3. В подземном царстве живут гномы, предпочитающие носить либо зелёные, либо синие, либо красные кафтаны. Некоторые из них всегда лгут, а остальные всегда говорят правду. Однажды каждому из них задали четыре вопроса.
1. «Ты предпочитаешь носить зелёный кафтан?»
2. «Ты предпочитаешь носить синий кафтан?»
3. «Ты предпочитаешь носить красный кафтан?»
4. «На предыдущие вопросы ты ответил честно?»
На первый вопрос «да» ответили 40 гномов, на второй — 50, на третий — 70, а на четвёртый — 100. Сколько честных гномов в подземном царстве?
Решение. 1) Так как и лжец и честный ответит на 4 вопрос "да", мы можем сказать, что гномов всего было 100.
2) Так как каждый гном носит только один кафтан, то мы можем сказать, что честный ответит да только 1 раз за первые 3 вопроса, а лжец - 2 раза.
3) В сумме ответов да получилось 160, следовательно 160-100=60 гномов ответили дважды.
4) 100-60=40 честных гномов.
Ответ: 40 честных гномов.

4. В ожидании покупателей продавец арбузов поочерёдно взвесил 20 арбузов (массой 1 кг, 2 кг, 3 кг, ..., 20 кг),

уравновешивая арбуз на одной чашке весов одной или двумя гирями на другой чашке (возможно, одинаковыми). При этом продавец записывал на бумажке, гири какой массы он использовал. Какое наименьшее количество различных чисел могло оказаться в его записях, если масса каждой гири – целое число килограммов? (ОММО)

$8 = 7 + 1$, $11 = 10 + 1$, $12 = 9 + 3$, $13 = 10 + 3$, $14 = 9 + 5$, $15 = 10 + 5$, $16 = 9 + 7$, $17 = 10 + 7$, $18 = 9 + 9$, $19 = 10 + 9$, $20 = 10 + 10$. Таким образом, шесть различных чисел могло быть записано.

Действительно, $2 = 1 + 1$, $4 = 3 + 1$, $6 = 5 + 1$, заметим, что половина арбузов имеет нечётную массу. Пусть из пяти гирь k имеют нечётную массу, а $5–k$ – чётную. Тогда количество способов взвесить арбуз нечётной массы в точности равно $k+k(5 – k)=6k– k^2$. Однако ни при каком $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ это выражение не равно 10 (это можно проверить либо подстановкой, либо решив квадратное уравнение $6k – k^2 = 10$)

Покажем, что пяти типов гирь недостаточно для требуемых взвешиваний. Если гирь пять, то какие-то двадцать арбузов, вообще говоря, взвесить можно. А именно: пять арбузов уравновесить одиночными гирями, пять – двойными и остальные $5·4 : 2 = 10$ арбузов – парами различных гирь. Но при этом каждая комбинация гирь должна быть использована ровно один раз.

Решение. Одной или двумя гирями массы 1 кг, 3 кг, 5 кг, 7 кг, 9 кг и 10 кг можно взвесить любой из данных арбузов.

Ответ: 6 чисел

5. У Пети имеется 50 шариков трёх цветов: красные, синие и зелёные. Известно, что среди любых 34 шариков есть хотя бы один красный; среди любых 35 — синий; среди любых 36 — зелёный. Сколько шариков зелёного цвета может быть у Пети? (ОММО)

Решение. Рассмотрим первое условие. Из того, что среди любых 34 шариков есть хотя бы один красный, следует, что не красных шариков не более 33. Отсюда получаем, что красных шариков не менее $50 − 33 = 17$. Аналогично, синих шариков не менее $50 − 34 =$

16, зелёных шариков не менее 50 − 35 = 15. Но 17 + 16 + 15 = 48, так что оставшиеся 2 шарика могут быть любого цвета. Значит зелёных шариков может быть любое количество от 15 до 17.
Ответ: У Пети может быть 15, 16 или 17 зелёных шариков.

6. В турнире по мини-футболу принимаются ставки на четыре команды. На первую команду ставки принимаются в соотношении 1:5 (при выигрыше первой команды игрок получает сумму, которую он поставил на эту команду и плюс пятикратную сумму, т. е. получает в шесть раз больше поставленных денег, а при проигрыше деньги не возвращаются). На вторую команду ставки принимаются в соотношении 1:1, на третью — 1:8, на четвертую — 1:7. Можно ли так поставить, чтобы выиграть при любом исходе турнира? (ОММО)
Решение. При победе первой команды ставку возвращают в шестикратном размере, поэтому на нее необходимо поставить более 1/6 всех денег. Аналогично, на вторую команду необходимо поставить более 1/2 всех денег, на третью более 1/9, на четвертую более 1/8. Так как сумма этих дробей меньше 1 (действительно, 1/2 + 1/6 + 1/8 + 1/9 < 1/2 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1), то существует набор чисел, в сумме дающих единицу, таких, что каждое больше соответствующей дроби. Любой такой набор подходит. (Школьники могут как сослаться на существование таких чисел, так и привести конкретный пример.)
Ответ: да, можно.
Жизненная ситуация: Данная задача поможет выиграть наибольший приз

Ссылки на олимпиады

1. Открытая олимпиада для школьников по математике - http://info.olimpiada.ru/activity/121

2. Всероссийская олимпиада для школьников - http://vos.olimpiada.ru/

3. Олимпиада Ломоносов - http://olymp.msu.ru/

4. Олимпиада Физтех - https://olymp.mipt.ru/

5. ОММО - http://olympiads.mccme.ru/ommo/17/

Авторы проекта

Артем Чеботаревский, 9 класс

Валерий Кощеев, 9 класс

Глеб Гора, 9 класс